Домашно №2, Задача 4 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Май 2023

Решение (i)

По дефиниция $I = \langle 2 - \sqrt{-5} \rangle = \{(2 - \sqrt{-5})z \mid z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\}$.
Нека $J = \{a + b\sqrt{-5} \mid a \equiv -2b \pmod 9\}$.
Ще докажем, че $I \subseteq J$. За произволно $i' = (2 - \sqrt{5}i)(c + \sqrt{5}di) \in I$, ще покажем че съществува $j = a + \sqrt{5}bi \in J$, такова че $j = i'$.

$$a + \sqrt{5}bi = (2 - \sqrt{5}i)(c + \sqrt{5}di) = (2c + 5d) + (2d - c)\sqrt{5}i$$
$$a \equiv -2b \pmod 9 \iff 2c + 5d \equiv -4d + 2c \pmod 9 \implies i' \in I \implies I \subseteq J$$

Ще докажем, че $J \subseteq I$. За произволно $j = a + \sqrt{5}bi \in J$, ще покажем че съществува $z = c + \sqrt{5}di \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, такова че $j = (2 - \sqrt{5}i)z$.

$$a + \sqrt{5}bi = (2 - \sqrt{5}i)(c + \sqrt{5}di) \quad a + \sqrt{5}bi = (2c + 5d) + (2d - c)\sqrt{5}i$$
$$\implies \left| \begin{matrix} a = 2c + 5d \\ b = 2d - c \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} a = 2(2d - b) + 5d \\ c = 2d - b \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 9d = a + 2b \\ 9c = 2(a + 2b) - 9b \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 9d = a - 2b \\ 9c = 2a - 5b \end{matrix} \right.$$
$$d = \frac{a - 2b}{9}, c = \frac{2a - 5b}{9} \in \mathbb{Z} \implies j \in I \implies J \subseteq I$$

Следователно $I = J$

Решение (ii)

Ще докажем че изображението ψ е хомоморфизъм на пръстени, като

$\psi : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}_9, \quad \psi(a + \sqrt{5}bi) = a + 2b \pmod 9 \quad \forall (a + \sqrt{5}bi) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
$\psi((a + \sqrt{5}bi) + (c + \sqrt{5}di)) = \psi((a + c) + (b + d)\sqrt{5}i) = a + c + 2(b + d) \pmod 9$
$= (a + 2b) \pmod 9 + (c + 2d) \pmod 9 = \psi(a + \sqrt{5}bi) + \psi(c + \sqrt{5}di)$
$\psi((a + \sqrt{5}bi)(c + \sqrt{5}di)) = \psi((ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}i) = (ac - 5bd) + 2(ad + bc)\sqrt{5}i \pmod 9$
$= (a + \sqrt{5}bi) \pmod 9 . (c + \sqrt{5}di) \pmod 9 = \psi(a + \sqrt{5}bi)\psi(c + \sqrt{5}di)$
за произволни $(a + \sqrt{5}bi), (c + \sqrt{5}di) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
$\ker(\psi) = \{a + b\sqrt{-5} \mid a + 2b \equiv 0 \pmod 9\} = \{a + b\sqrt{-5} \mid a \equiv -2b \pmod 9\} = I$
Следователно, от теоремата за хомоморфизми на пръстени $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/I = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\ker(\psi) \simeq im(\psi) = \mathbb{Z}_9$